

Ha tudom, hogy miről van szó

Iskolai feladatok absztrakt algebrai háttérrel

Kovács Veronika, Palotay Dorka, Pozsonyi Enikő, Szabó Csaba

ELTE, TTK

2013. január 25.

A hallgató dilemmája

„Miért kell olyan dolgokat tanulni az egyetemen, amiket később sehol nem fogunk használni?”

Kovács Veronika

A kutatás kiinduló kérdése

A hallgató dilemmája

„Miért kell olyan dolgokat tanulni az egyetemen, amiket később sehol nem fogunk használni?”

Kovács Veronika

Az oktató dilemmája

„Az a baj, hogy ha a hallgatók meglátnak egy sakktáblát, nem veszik észre, hogy egy 64 dimenziós vektortérrel van dolguk.”

Szabó Csaba

- A kapcsolat létezésének megmutatása
- Alkalmas feladatok gyűjtése:
 - elemi- és
 - versenyfeladatok
- A feladatok feldolgozása
- Ezek bevitele az egyetemi órákra

Akiket megkérdeztünk

- **B. Szendrei Mária**, tanszékvezető egyetemi tanár, Szegedi Tudományegyetem
- **Szabó László**, egyetemi docens, tárgyfelelős, Szegedi Tudományegyetem
- **Horváth Gábor**, Algebra Kutatócsoport vezetője, Debreceni Egyetem
- **Hermann Péter**, egyetemi docens, tárgyfelelős, ELTE
- **Csörgő Piroska**, egyetemi tanár, Eszterházy Károly Főiskola, Eger
- **Szabó Csaba**, ELTE



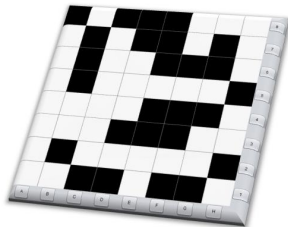
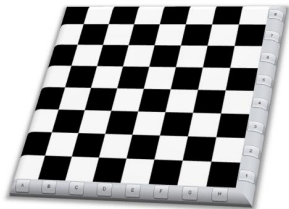
Pósa Lajos tehetségondozó
matematika tábor



Juhász Péter: Hogyan foglalkozzunk
tehetséges gyerekekkel?



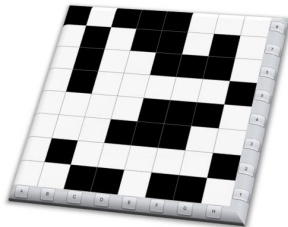
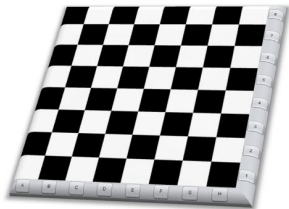
A feladat





A feladat

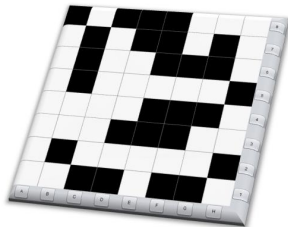
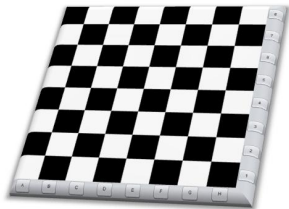
- Jancsi kapott egy -t karácsonyra






A feladat

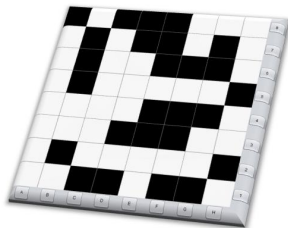
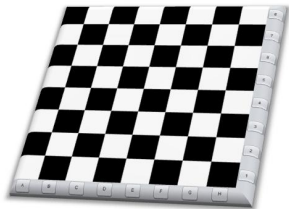
- Jancsi kapott egy -t karácsonyra
- a boszorkány összekeverte a színezését






A feladat

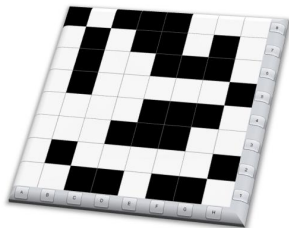
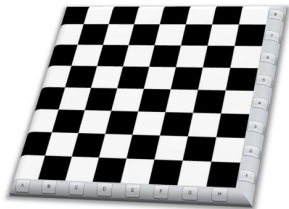
- Jancsi kapott egy -t karácsonyra
- a boszorkány összekeverte a színezését
- sor- és oszloptündérek segítenek





A feladat

- Jancsi kapott egy -t karácsonyra
- a boszorkány összekeverte a színezését
- sor- és oszloptündérek segítenek
- változtatás – ellentetre





A középiskolás megoldás



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete
- én egy kicsi négyzet vagyok



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete
- én egy kicsi négyzet vagyok
- sorrend nem számít



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete
- én egy kicsi négyzet vagyok
- sorrend nem számít
- minden tündér max. 1-szer



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete
- én egy kicsi négyzet vagyok
- sorrend nem számít
- minden tündér max. 1-szer
- 8 oszloptündér: 1. sor



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete
- én egy kicsi négyzet vagyok
- sorrend nem számít
- minden tündér max. 1-szer
- 8 oszloptündér: 1. sor
- sortündérek: 1. oszlop



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete
- én egy kicsi négyzet vagyok
- sorrend nem számít
- minden tündér max. 1-szer
- 8 oszloptündér: 1. sor
- sortündérek: 1. oszlop
- kész vagy nem kész



A középiskolás megoldás

- páratlan sok fekete
- én egy kicsi négyzet vagyok
- sorrend nem számít
- minden tündér max. 1-szer
- 8 oszloptündér: 1. sor
- sortündérek: 1. oszlop
- kész vagy nem kész
- elején látszik

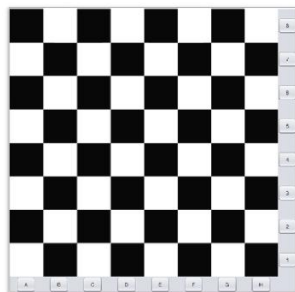


Négyféle módszer

- I. absztrakt vektortér
- II. mátrixok vektortere
- III. 2-rangú mátrixok
- IV. művelettáblák



A sakktábla



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



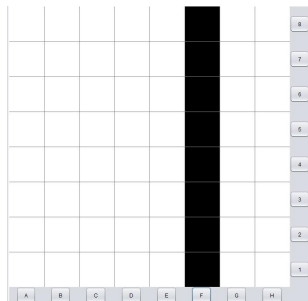
Sortünder:

								8
								7
								6
								5
								4
								3
								2
								1
A	B	C	D	E	F	G	H	

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Oszloptünder:



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Egy tündér hatása

fekete \rightarrow fehér

fehér \rightarrow fekete



Egy tündér hatása

1 → 0

0 → 1



Egy tündér hatása

fekete \rightarrow fehér

fehér \rightarrow fekete



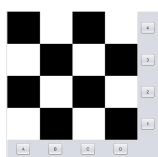
Egy tündér hatása

$$1 \rightarrow 0 \quad 1+1=0$$

$$0 \rightarrow 1 \quad 0+1=1$$

Összhatás

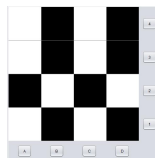
- 1 hozzáadása mod 2 teljes sorhoz, vagy oszlophoz
- tündérmátrix hozzáadása a sakktáblához



+



=



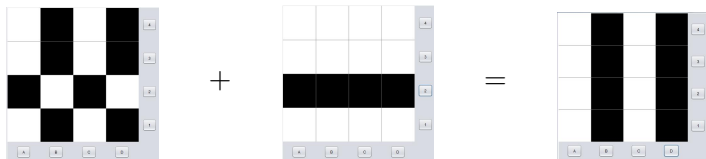
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

+

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



+



=



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

+

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



A tündérek összhatása

$$S_1 + S_8 + O_3 + \cdots + O_2 + S_1 + O_7 + O_2 = \\ \sum \lambda_i S_i + \sum \mu_i O_i$$

\mathbb{Z}_2 fölötti lineáris kombináció



A tündérek összhatása

$$S_1 + S_8 + O_3 + \cdots + O_2 + S_1 + O_7 + O_2 = \\ \sum \lambda_i S_i + \sum \mu_i O_i$$

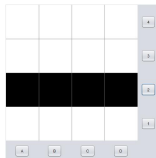
\mathbb{Z}_2 fölötti lineáris kombináció

Átfogalmazás középiskolára

$\lambda_i, \mu_i = 0$ vagy 1	\implies	minden tündér maximum 1-szer jön
összeadás kommutatív	\implies	a sorrend mindegy



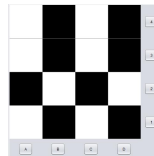
$$\sum \lambda_i S_i \quad + \quad \sum \mu_i O_i \quad = \quad \sum \lambda_i S_i + \sum \mu_i O_i$$

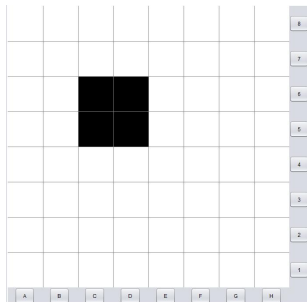


+



=





$$T_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Elérhető mátrixok:

- $\sum \lambda_{ij} T_{ij}$
- túl nagy dimeziós: $\dim W = 49 \implies$
- átláthatóbb **merőleges altér** keresése.



Elérhető mátrixok:

- $\sum \lambda_{ij} T_{ij}$
- túl nagy dimeziós: $\dim W = 49 \implies$
- átláthatóbb **merőleges altér** keresése.

$$15+49=64$$

- $\dim W + \dim W^\perp = 64$
- $\dim W^\perp = 15$



Elérhető mátrixok:

- $\sum \lambda_{ij} T_{ij}$
- túl nagy dimeziós: $\dim W = 49 \implies$
- átláthatóbb **merőleges altér** keresése.

$$15+49=64$$

- $\dim W + \dim W^\perp = 64$
- $\dim W^\perp = 15$

Akár Gauss-eliminációval

Elérhető \iff minden sorban és oszlopban a koordináták összege 0.

Új feladatok: Julcsi és a ló



Julcsi egy szép



kapott karácsonyra. De ő inkább azt szeretette



volna, hogy

. Persze, csak a

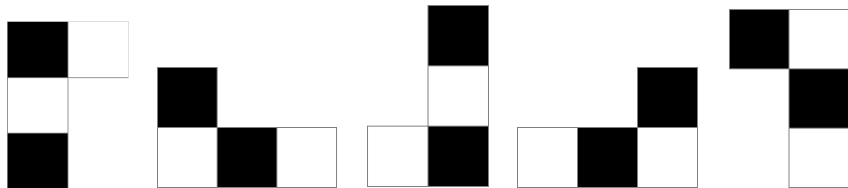


jött.

A



rádásul megváltoztatta a sakktábla színezését.



Elérhető mátrixok:

- 336 ló \rightarrow nagyon sok generátor
- $\dim = 62$

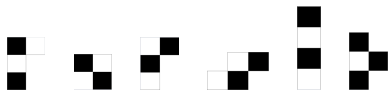
Új feladatok: Julcsi és a ló



Tetrisszel a boszorkány ellen

$\text{dim} = 63$

Új feladatok: Julcsi és a ló



Tetriszel a boszorkány ellen

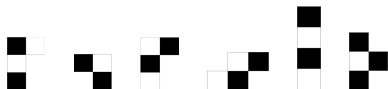
dim = 63



Ha elvész a „T” elem

dim = 62

Új feladatok: Julcsi és a ló



Tetrisszel a boszorkány ellen

dim = 63



Ha elvész a „T” elem

dim = 62



Megkerült a „T” elem

dim = 63