Pókok és hurkok
– Ízelítő a topologikus fixponttételek elméletéből –

Bessenyei Mihály

Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia

Partiumi Keresztény Egyetem (Nagyvárad), 2013 január 25–27.

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás
- Riesz Frigyes (1880–1956): funkcionálanalízis

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás
- Riesz Frigyes (1880–1956): funkcionálanalízis
- Fejér Lipót (1880–1959): approximációelmélet

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás
- Riesz Frigyes (1880–1956): funkcionálanalízis
- Fejér Lipót (1880–1959): approximációelmélet
- Haar Alfréd (1885–1933): mértékelmélet

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás
- Riesz Frigyes (1880–1956): funkcionálanalízis
- Fejér Lipót (1880–1959): approximációelmélet
- Haar Alfréd (1885–1933): mértékelmélet
- Pólya György (1887–1985): módszertan

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás
- Riesz Frigyes (1880–1956): funkcionálanalízis
- Fejér Lipót (1880–1959): approximációelmélet
- Haar Alfréd (1885–1933): mértékelmélet
- Pólya György (1887–1985): módszertan
- Neumann János (1903–1957): funkcionálanalízis

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás
- Riesz Frigyes (1880–1956): funkcionálanalízis
- Fejér Lipót (1880–1959): approximációelmélet
- Haar Alfréd (1885–1933): mértékelmélet
- Pólya György (1887–1985): módszertan
- Neumann János (1903–1957): funkcionálanalízis
- Erdős Pál (1913–1996): kombinatorika

A modern magyar matematika néhány jeles képviselője

- Kőnig Gyula (1849–1953): halmazelmélet
- Kürschák József (1864–1933): tehetséggondozás
- Riesz Frigyes (1880–1956): funkcionálanalízis
- Fejér Lipót (1880–1959): approximációelmélet
- Haar Alfréd (1885–1933): mértékelmélet
- Pólya György (1887–1985): módszertan
- Neumann János (1903–1957): funkcionálanalízis
- Erdős Pál (1913–1996): kombinatorika
- Tandori Károly (1925–2005): approximációelmélet

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika sikerének háttere

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika sikerének háttere

- Elit iskolák, kimagasló tanáregyéniségek

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika sikerének háttere

- Elit iskolák, kimagasló tanáregyéniségek
- Tehetséggondozás: tagozatok, szakkörök, versenyek

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika sikerének háttere

- Elit iskolák, kimagasló tanáregyéniségek
- Tehetséggondozás: tagozatok, szakkörök, versenyek
- Könyvek, folyóiratok (KöMaL)

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika sikerének háttere

- Elit iskolák, kimagasló tanáregyéniségek
- Tehetséggondozás: tagozatok, szakkörök, versenyek
- Könyvek, folyóiratok (KöMaL)
- Szemléletmód, szemléletformálás

Bevezető gondolatok

A modern magyar matematika sikerének háttere

- Elit iskolák, kimagasló tanáregyéniségek
- Tehetséggondozás: tagozatok, szakkörök, versenyek
- Könyvek, folyóiratok (KöMaL)
- Szemléletmód, szemléletformálás

Szemléletmód, szemléletformálás

A versenyfeladatokhoz közölt megoldások igen gyakran rámutatnak az általánosítási lehetőségekre, sőt számos esetben kitekintést adnak a magasabb matematika diszciplináira és módszereire. (Lásd például: Matematikai versenytételek; KöMaL.)

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényeket, amelyekre minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén* $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$ *teljesül!*

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényeket, amelyekre minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén* $f(x) - f(y) \le (x - y)^2$ *teljesül!*

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k.

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \le (x - y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le$$

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \le (x - y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le (x_k - x_{k-1})^2 =$$

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{(y - x)^2}{n^2} =: \frac{h}{n^2}.$$

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \le (x - y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{(y-x)^2}{n^2} =: \frac{h}{n^2}.$$

Így, teleszkópikus összegzést és háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$|f(y) - f(x)| =$$

Feladat

Határozza meg mindazon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x,y\in\mathbb{R}$ esetén $f(x)-f(y)\le (x-y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x<y$; legyen $x_0=x$ és $x_n=y$. Osszuk föl az $[x,y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|\le (x_k-x_{k-1})^2=\frac{(y-x)^2}{n^2}=:\frac{h}{n^2}.$$

Így, teleszkópikus összegzést és háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$|f(y)-f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\right|\le$$

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \le (x-y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{(y-x)^2}{n^2} =: \frac{h}{n^2}.$$

Így, teleszkópikus összegzést és háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le$$

Bevezető gondolatok

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \le (x-y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{(y-x)^2}{n^2} =: \frac{h}{n^2}.$$

Így, teleszkópikus összegzést és háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \frac{h}{n}.$$

Bevezető gondolatok

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$ teljesül!

Megoldás

Fölthető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{(y-x)^2}{n^2} =: \frac{h}{n^2}.$$

Így, teleszkópikus összegzést és háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \frac{h}{n}.$$

Ha a bal oldal pozitív lenne, akkor minden n természetes szám esetén $n \leq c$ telejsülne, ami lehetetlen.

Bevezető gondolatok

Feladat

Határozza meg mindazon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) - f(y) \leq (x-y)^2$ teljesül!

Megoldás

Föltehető, hogy $x < y$; legyen $x_0 = x$ és $x_n = y$. Osszuk föl az $[x, y]$ intervallumot n egyenlő részre, s jelölje a k-adik osztópontot x_k. Ekkor

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq (x_k - x_{k-1})^2 = \frac{(y-x)^2}{n^2} =: \frac{h}{n^2}.$$

Így, teleszkópikus összegzést és háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \frac{h}{n}.$$

Ha a bal oldal pozitív lenne, akkor minden n természetes szám esetén $n \leq c$ telejsülne, ami lehetetlen. Vagyis, f szükségképpen konstans.

Bevezető gondolatok

Tanulságok

Bevezető gondolatok

Tanulságok

- Teleszkópikus összegzés: Newton–Leibniz tétel

Bevezető gondolatok

Tanulságok

- Teleszkópikus összegzés: Newton–Leibniz tétel
- Indirekt feltétel: Archimédeszi tulajdonság

Tanulságok

- Teleszkópikus összegzés: Newton–Leibniz tétel
- Indirekt feltétel: Archimédeszi tulajdonság
- Kitekintés: differenciahányados, rendőr-elv, középérték-tétel

Bevezető gondolatok

Tanulságok

- Teleszkópikus összegzés: Newton–Leibniz tétel
- Indirekt feltétel: Archimédeszi tulajdonság
- Kitekintés: differenciahányados, rendőr-elv, középérték-tétel
- Általánosítás: pozitív szubhomogén függvények

Tanulságok

- Teleszkópikus összegzés: Newton–Leibniz tétel
- Indirekt feltétel: Archimédeszi tulajdonság
- Kitekintés: differenciahányados, rendőr-elv, középérték-tétel
- Általánosítás: pozitív szubhomogén függvények

Szemléletmód, szemléletformálás

A versenyfeladatokhoz közölt megoldások nem csupán a matematika klasszikus területeit érintik, hanem számos esetben ízelítőt adnak a fiatalabb, még fejlődésben lévő területek eredményeiből és módszereiből is. (Diofantikus problémák; kódelmélet; térkitöltés; fraktálok.)

Célkitűzés

Tétel (Brouwer-féle fixponttétel)

Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, konvex, kompakt halmaz, $f : K \to K$ folytonos leképezés, akkor létezik f-nek fixpontja, azaz van olyan $x_0 \in K$, hogy $f(x_0) = x_0$ teljesül.

Célkitűzés

Tétel (Brouwer-féle fixponttétel)

Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, konvex, kompakt halmaz, $f : K \to K$ folytonos leképezés, akkor létezik f-nek fixpontja, azaz van olyan $x_0 \in K$, hogy $f(x_0) = x_0$ teljesül.

Tétel (Negatív retrakt elv)

Nem létezik az n dimenziós eukliedszi tér zárt egységgömbjének a héjra való retrakciója, azaz olyan folytonos leképezése, melynek héjra való megszorítása az identitás.

Célkitűzés

Tétel (Brouwer-féle fixponttétel)

Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, konvex, kompakt halmaz, $f : K \to K$ folytonos leképezés, akkor létezik f-nek fixpontja, azaz van olyan $x_0 \in K$, hogy $f(x_0) = x_0$ teljesül.

Tétel (Negatív retrakt elv)

Nem létezik az n dimenziós eukliedszi tér zárt egységgömbjének a héjra való retrakciója, azaz olyan folytonos leképezése, melynek héjra való megszorítása az identitás.

Összegzés

A vállakozás lehetetlen, de nem nehéz.

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

- Szokatlan, a középiskolaitól távol álló szemléletmód

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

- Szokatlan, a középiskolaitól távol álló szemléletmód
- Magasfokú absztrakciót képviselő fogalmak, tulajdonságok

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

- Szokatlan, a középiskolaitól távol álló szemléletmód
- Magasfokú absztrakciót képviselő fogalmak, tulajdonságok
- Alapos háttérismeret birtokában megérthető nehéz bizonyítások

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

- Szokatlan, a középiskolaitól távol álló szemléletmód
- Magasfokú absztrakciót képviselő fogalmak, tulajdonságok
- Alapos háttérismeret birtokában megérthető nehéz bizonyítások

Lehetséges orvoslás

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

- Szokatlan, a középiskolaitól távol álló szemléletmód
- Magasfokú absztrakciót képviselő fogalmak, tulajdonságok
- Alapos háttérismeret birtokában megérthető nehéz bizonyítások

Lehetséges orvoslás

- Intuíció kialakítása megfelelő példákkal és szemléltetéssel

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

- Szokatlan, a középiskolaitól távol álló szemléletmód
- Magasfokú absztrakciót képviselő fogalmak, tulajdonságok
- Alapos háttérismeret birtokában megérthető nehéz bizonyítások

Lehetséges orvoslás

- Intuíció kialakítása megfelelő példákkal és szemléltetéssel
- Speciális, de nem triviális esetekre való szorítkozás

Célkitűzés

Lehetséges megközelítések

- Analitikus megközelítés: differenciálformák és approximáció
- Topológiai megközelítés: fundamentális csoport mint invariáns
- Kombinatorikus út: Sperner-lemma, KKM-lemma

Fölmerülő problémák

- Szokatlan, a középiskolaitól távol álló szemléletmód
- Magasfokú absztrakciót képviselő fogalmak, tulajdonságok
- Alapos háttérismeret birtokában megérthető nehéz bizonyítások

Lehetséges orvoslás

- Intuíció kialakítása megfelelő példákkal és szemléltetéssel
- Speciális, de nem triviális esetekre való szorítkozás
- Az igazán nagyszerű gondolatok egyszerűek!

Bevezető probléma

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Bevezető probléma

Képzeljünk el a Világegyetemben két tükörsima felszínű bolygót. Az egyik gömb, míg a másik tórusz, vagyis „úszógumi" alakú. Mindkét bolygón egy-egy matematikus vénájú pók él. Különbséget tudnak-e tenni a két bolygó között anélkül, hogy képesek lennének bármiféle mérésre vagy lakóhelyük külső szemrevételezésére?

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Tétel (Brouwer-féle fixponttétel)

A zárt egységkörlemez bármely önmagába való folytonos leképezésének létezik fixpontja, azaz van olyan pont a körlemezen, mely egybeesik saját képével.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Tétel (Brouwer-féle fixponttétel)

A zárt egységkörlemez bármely önmagába való folytonos leképezésének létezik fixpontja, azaz van olyan pont a körlemezen, mely egybeesik saját képével.

Szemléletesen:

A nyers palacsintatésztának van olyan részecskéje, amely a sütés végeztével az eredeti helyére kerül majd vissza.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Tétel (Brouwer-féle fixponttétel)

A zárt egységkörlemez bármely önmagába való folytonos leképezésének létezik fixpontja, azaz van olyan pont a körlemezen, mely egybeesik saját képével.

Szemléletesen:

A nyers palacsintatésztának van olyan részecskéje, amely a sütés végeztével az eredeti helyére kerül majd vissza.

Tétel (Negatív retrakt elv)

Nem létezik a zárt egységkörlemeznek az ívre való retrakciója, azaz olyan folytonos leképezése, amely az ívet pontonként fixen hagyja.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Tétel (Brouwer-féle fixponttétel)

A zárt egységkörlemez bármely önmagába való folytonos leképezésének létezik fixpontja, azaz van olyan pont a körlemezen, mely egybeesik saját képével.

Szemléletesen:

A nyers palacsintatésztának van olyan részecskéje, amely a sütés végeztével az eredeti helyére kerül majd vissza.

Tétel (Negatív retrakt elv)

Nem létezik a zárt egységkörlemeznek az ívre való retrakciója, azaz olyan folytonos leképezése, amely az ívet pontonként fixen hagyja.

Szemléletesen:

Ha a dob hártyáját a peremre próbáljuk feszíteni, akkor a hártya elszakad.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Példa folytonos leképezésre

A továbbiakban jelölje D a zárt, origó középpontú egységkörlemezt, s legyen $f : D \setminus \{(0,0)\} \to S$ az alábbi módon adott leképezés:

$$f(x,y) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Ekkor f folytonos értelmezési tartományának minden p pontjában.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Példa folytonos leképezésre

A továbbiakban jelölje D a zárt, origó középpontú egységkörlemezt, s legyen $f : D \setminus \{(0,0)\} \to S$ az alábbi módon adott leképezés:

$$f(x,y) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Ekkor f folytonos értelmezési tartományának minden p pontjában.

Példa nem folytonos leképezésre

A továbbiakban jelölje S a zárt, origó középpontú egységkörlemez határát, vagyis az ívet, s legyen $g \colon D \to S$ az alábbi módon adott leképezés:

$$g(x,y) := f(x,y) \quad (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}; \qquad g(0,0) := (1,0).$$

Ekkor g nem folytonos a $p = (0,0)$ pontban.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Tétel (Brouwer)

A zárt egységkörlemez bármely önmagába való folytonos leképezésének létezik fixpontja, azaz van olyan pont a körlemezen, mely egybeesik saját képével.

Tétel (Negatív retrakt elv)

Nem létezik a zárt egységkörlemeznek az ívre való retrakciója, azaz olyan folytonos leképezése, amely az ívet pontonként fixen hagyja.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

Tétel (Brouwer)

A zárt egységkörlemez bármely önmagába való folytonos leképezésének létezik fixpontja, azaz van olyan pont a körlemezen, mely egybeesik saját képével.

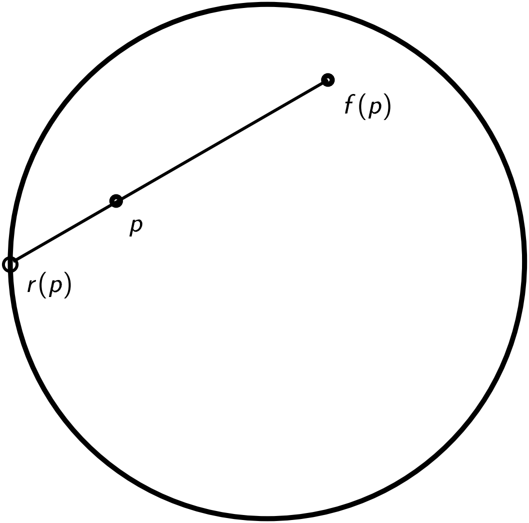
Tétel (Negatív retrakt elv)

Nem létezik a zárt egységkörlemeznek az ívre való retrakciója, azaz olyan folytonos leképezése, amely az ívet pontonként fixen hagyja.

Tétel (Ekvivalencia)

A Brouwer-féle fixponttétel és a negatív retrakt elv egymással ekvivalens. Azaz, pontosan akkor létezik a körlemezen fixpontmentes leképezés, ha létezik az ívre való retrakt (illetve, pontosan akkor nem létezik a körlemezen fixpontmentes leképezés, ha nem létezik az ívre való retrakt).

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen



A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

A negatív retrakt elv bizonyítása, első felvonás

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

A negatív retrakt elv bizonyítása, első felvonás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik D-nek S-re való retrakciója.

A negatív retrakt elv bizonyítása, első felvonás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik D-nek S-re való retrakciója. Tekintsünk egy olyan S-beli hurkot, amely összehúzható valamely S-beli pontra D-beli deformációval.

A negatív retrakt elv bizonyítása, első felvonás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik D-nek S-re való retrakciója. Tekintsünk egy olyan S-beli hurkot, amely összehúzható valamely S-beli pontra D-beli deformációval. Ekkor a szóbanforgó hurok összehúzható S-beli deformációval is ugyanerre a pontra, nevezetesen a D-beli deformáció retraktjával.

A Brouwer-féle fixponttétel zárt körlemezen

A negatív retrakt elv bizonyítása, első felvonás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik D-nek S-re való retrakciója. Tekintsünk egy olyan S-beli hurkot, amely összehúzható valamely S-beli pontra D-beli deformációval. Ekkor a szóbanforgó hurok összehúzható S-beli deformációval is ugyanerre a pontra, nevezetesen a D-beli deformáció retraktjával.

A negatív retrakt elv bizonyítása, második felvonás

Azonban minden S-beli hurok egy pontra deformálható D-ben, és van olyan S-beli hurok, amely nem deformálható egy pontra S-ben!

A negatív retrakt elv bizonyítása, első felvonás

Indirekt tegyük fel, hogy létezik D-nek S-re való retrakciója. Tekintsünk egy olyan S-beli hurkot, amely összehúzható valamely S-beli pontra D-beli deformációval. Ekkor a szóbanforgó hurok összehúzható S-beli deformációval is ugyanerre a pontra, nevezetesen a D-beli deformáció retraktjával.

A negatív retrakt elv bizonyítása, második felvonás

Azonban minden S-beli hurok egy pontra deformálható D-ben, és van olyan S-beli hurok, amely nem deformálható egy pontra S-ben! A kapott ellentmondás miatt nem létezik a zárt körlemeznek az ívre való retraktja, tehát igaz a negatív retrakt elv.

Eredmények a topológikus fixponttételek elméletéből

Eredmények a topológikus fixponttételek elméletéből

Tétel (Poincaré-féle sündisznótétel)

A páratlan dimenziós tér egységgömbjének héján nem adható meg seholsem nulla érintővektormező.

Eredmények a topologikus fixponttételek elméletéből

Tétel (Poincaré-féle sündisznótétel)

A páratlan dimenziós tér egységgömbjének héján nem adható meg seholsem nulla érintővektormező.

Az időjóslás első alaptétele

Tökéletesen gömb alakú bolygókon mindig van olyan hely a felszínen, ahol nem fúj a szél.

Tétel (Poincaré-féle sündisznótétel)

A páratlan dimenziós tér egységgömbjének héján nem adható meg seholsem nulla érintővektormező.

Az időjóslás első alaptétele

Tökéletesen gömb alakú bolygókon mindig van olyan hely a felszínen, ahol nem fúj a szél.

Tétel (Borsuk–Ulam-féle antipodális tétel)

Az $(n+1)$ dimenzós tér egységgömbjének héján akárhogy megadva n darab folytonos, valós értékű függvényt, mindig van olyan ellenlakó pontpár, melyekben a megadott függvények rendre megegyeznek.

Tétel (Poincaré-féle sündisznótétel)

A páratlan dimenziós tér egységgömbjének héján nem adható meg seholsem nulla érintővektormező.

Az időjóslás első alaptétele

Tökéletesen gömb alakú bolygókon mindig van olyan hely a felszínen, ahol nem fúj a szél.

Tétel (Borsuk–Ulam-féle antipodális tétel)

Az $(n+1)$ *dimenzós tér egységgömbjének héján akárhogy megadva* n *darab folytonos, valós értékű függvényt, mindig van olyan ellenlakó pontpár, melyekben a megadott függvények rendre megegyeznek.*

Az időjóslás második alaptétele

Tökéletesen gömb alakú bolygókon mindig van olyan ellenlakó pontpár, ahol a légnyomás- és hőmérsékleti értékek rendre azonosak.

Feladatok

Néhány topológikus búcsúajándék...

Feladatok

- *Megkülönböztethető-e a gömb a tórusztól?*

Néhány topológikus búcsúajándék...

Feladatok

- *Megkülönböztethető-e a gömb a tórusztól?*
- *Alkalmazható-e az ismertetett módszer három dimenzióban?*

Néhány topológikus búcsúajándék...

Feladatok

- *Megkülönböztethető-e a gömb a tórusztól?*
- *Alkalmazható-e az ismertetett módszer három dimenzióban?*
- *Fölbontható-e a sík két diszjunkt, egybevágó részre?*

Néhány topológikus búcsúajándék...

Feladatok

- *Megkülönböztethető-e a gömb a tórusztól?*
- *Alkalmazható-e az ismertetett módszer három dimenzióban?*
- *Fölbontható-e a sík két diszjunkt, egybevágó részre?*
- *Fölbontható-e a zárt körlap két diszjunkt, egybevágó részre?*

Néhány topológikus búcsúajándék...

Feladatok

- *Megkülönböztethető-e a gömb a tórusztól?*
- *Alkalmazható-e az ismertetett módszer három dimenzióban?*
- *Fölbontható-e a sík két diszjunkt, egybevágó részre?*
- *Fölbontható-e a zárt körlap két diszjunkt, egybevágó részre?*
- *Igazolja, hogy ha* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *folytonos, akkor van fixpontja.*

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

Henri Poincaré (1854–1912)