

# Függvényfogalom kialakítása

Van Hiele típusú keretrendszerre épített tevékenységek segítségével

Csapó Hajnalka  
Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda  
SimpleX Egyesület, Csíkszereda



2013. január 26.



## 1 A szintek leírása

- Intuitív szint (0. szint)
- Az elemzés szintje (1. szint)
- Az informális dedukció szintje (2. szint)
- A formális dedukció szintje (3. szint)
- A formális logika szintje (4. szint)

## 2 Tevékenységek

- Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához
- A függvény fogalmának bevezetése
- Függvények felismerése különböző reprezentációkban
- Függvény jelölése, összeszámlálása

## 3 Tapasztalatok, következtetések

## 1 A szintek leírása

- Intuitív szint (0. szint)
- Az elemzés szintje (1. szint)
- Az informális dedukció szintje (2. szint)
- A formális dedukció szintje (3. szint)
- A formális logika szintje (4. szint)

## 2 Tevékenységek

- Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához
- A függvény fogalmának bevezetése
- Függvények felismerése különböző reprezentációkban
- Függvény jelölése, összeszámlálása

## 3 Tapasztalatok, következtetések

## 1 A szintek leírása

- Intuitív szint (0. szint)
- Az elemzés szintje (1. szint)
- Az informális dedukció szintje (2. szint)
- A formális dedukció szintje (3. szint)
- A formális logika szintje (4. szint)

## 2 Tevékenységek

- Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához
- A függvény fogalmának bevezetése
- Függvények felismerése különböző reprezentációkban
- Függvény jelölése, összeszámlálása

## 3 Tapasztalatok, következtetések

# A szintek leírása

## Intuitív szint (0. szint)

- A megfeleltetés fogalmának intuitív kialakítása.
- A függvény fogalma későbbiekben ne a függéshez, hanem a megfeleltetéshez kapcsolódjon.
- Olyan pedagógiai gyakorlathoz nyúljunk, ami nem szigorúan matematikai.
- Világosan kell használni a fogalmakat, és tudni kell, hogy játék szintjén minden egyes momentum valójában milyen absztrakt háttértudást támogat.
- Egyszerű példák segítségével kell kialakítani a diagram, a táblázat, a grafikus kép fogalmát és itt tisztázódik, hogy mit jelent a megfeleltetés.
- Sok diáknak problémát okoz a konkrét függvény összekapcsolása az intuíciójával. Figyelni kell a reprezentációk közötti flexibilis áttérés megvalósulására.

# A szintek leírása

## Az elemzés szintje (1. szint)

- A diák ezen a szinten tanulmányozza, hogy egy megfeleltetés függvény-e.
- Itt vizsgálja, hogy egy függvény helyesen van-e értelmezve (értelmezési tartomány, értékkészlet, megfeleltetési szabály.)
- Itt válik funkcionálissá, automatikussá a reprezentációról való visszaolvasás, illetve a reprezentációk közötti áttérés.
- Ezen a szinten a diák le tudja olvasni egy függvény grafikus képéről, hogy növekvő vagy csökkenő, míg intuitív szinten erre nem volt képes.
- Ezen a szinten megjelenik majdnem minden tulajdonság, de a következő szint lesz az ahol a tulajdonságok be is lesznek bizonyítva.
- A diák még nem tud ábrázolni csak nagyon egyszerű függvényeket.

# A szintek leírása

## Az informális dedukció szintje (2. szint)

- Ezen a szinten létrejön a fogalmak és a szimbolikus leírás összhangja.
- Egyszerű kifejezésekkel értelmezett függvények esetén bizonyítjuk az alapvető tulajdonságokat.
- A tapasztalati szintre (észlelésre) való hivatkozás egyre kisebb szerepet kap, helyette a szimbólumokra épített érvelés kezd előtérbe kerülni.
- Itt már megjelenik az elsőfokú függvény és tulajdonságai.
- Ezen a szinten jelennek meg a függvényekkel való algebrai műveletek (az összetétel formálisan jelenik meg) és ezeket alapszinten össze is köti a tulajdonságokkal.

# A szintek leírása

## A formális dedukció szintje (3. szint)

- A reprezentációkat, a szimbolikus reprezentációkat és a tulajdonságokat itt már abszolút koherens módon össze kell kötni, ami azt jelenti, hogy ezen a szinten már kell tudni, hogy ha műveleteket alkalmazunk bizonyos típusú objektumokra, akkor az eredmény milyen lesz.
- Megjelenik a függvény szimbolikus leírása, a műveletek (beleértve az összetétel tulajdonságait is), a tulajdonságok szigorú összekötése és összetett függvények felismerése.
- Fontos, hogy a fogalmak már teljesen tiszták legyenek, különben szimbolikus számolási nehézségek adódhatnak.



# A szintek leírása

## A formális logika szintje (4. szint)

- Ezen a szinten a függvények értelmezési tartományai különböző axiomatikus felépített halmazok (pl. terek) és a függvények lehetnek operátorok, funkcionálok.
- Gyakori, hogy a függvény konkrétan nem definiálható, csak bizonyos tulajdonságokból más tulajdonságokra következtethetünk, a tulajdonságok közötti viszonyok tisztázása kerül előtérbe.

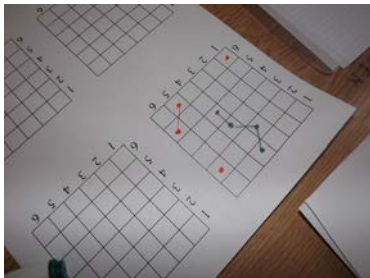
# Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához

- Különféle játékok a tanulókkal és születési hónapjukkal
- Különféle játékok a tanulók sorszámaival



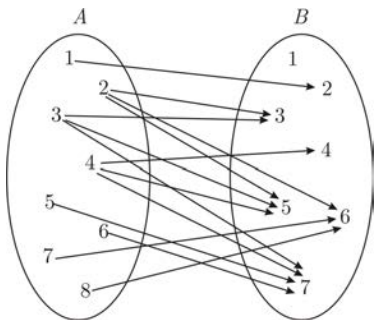
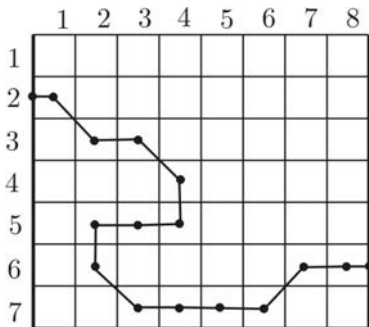
# Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához

- Torpedó játék



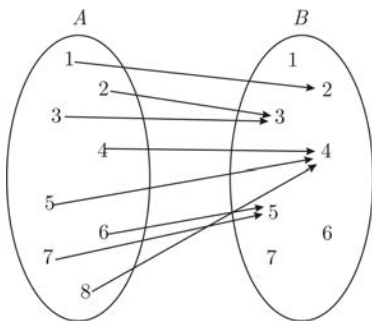
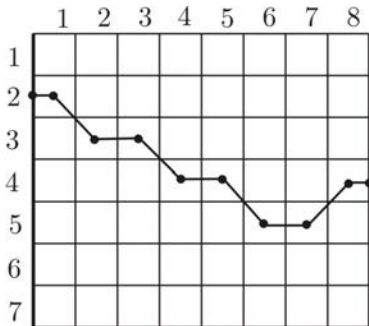
# Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához

## • Átkelés a folyón



$(1, 2); (2, 3); (2, 5); (2, 6); (3, 3); (3, 5); (3, 7); (4, 4); (4, 5); (4, 7);$   
 $(5, 7); (6, 7), (7, 6), (8, 6)$

# Bemelegítő játékok a hozzárendelések tanításához

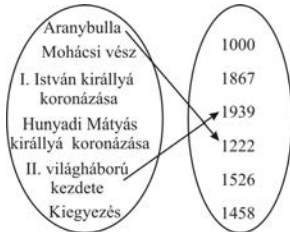
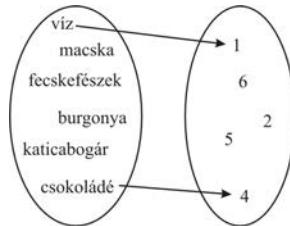


$(1, 2); (2, 3); (3, 3); (4, 4); (5, 4); (6, 5), (7, 5), (8, 4).$

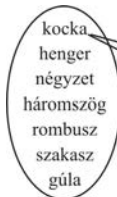
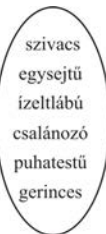
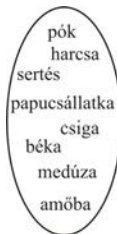
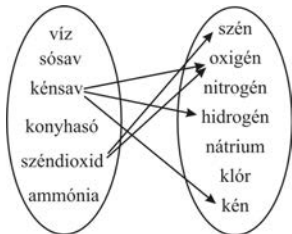
# A függvény fogalmának bevezetése

Arany János  
Petőfi Sándor  
József Attila  
Kányádi Sándor  
Weöres Sándor  
Vörösmarty  
Mihály

Szózat  
Bóbita  
Családi kör  
Anyám tyúkjá  
Nyergesetető  
Nemzeti dal  
Fától fáig  
Altató



# A függvény fogalmának bevezetése



# A függvény fogalmának bevezetése

## Észrevételek

- Egyértelmű megfeleltetés
- Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés
- Többértelmű megfeleltetés
- A *függvény* szó még nem hangzik el!



# A függvény fogalmának bevezetése

## Észrevételek

- Egyértelmű megfeleltetés
- Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés
- Többértelmű megfeleltetés
- A *függvény* szó még nem hangzik el!

# A függvény fogalmának bevezetése

## Észrevételek

- Egyértelmű megfeleltetés
- Kölcsonösen egyértelmű megfeleltetés
- Többértelmű megfeleltetés
- A *függvény* szó még nem hangzik el!

# A függvény fogalmának bevezetése

## Észrevételek

- Egyértelmű megfeleltetés
- Kölcsonösen egyértelmű megfeleltetés
- Többértelmű megfeleltetés
- *A függvény szó még nem hangzik el!*

# A függvény fogalmának bevezetése

## Észrevételek

- Egyértelmű megfeleltetés
- Kölcsonösen egyértelmű megfeleltetés
- Többértelmű megfeleltetés
- A *függvény* szó még nem hangzik el!

# A függvény fogalmának bevezetése

- A halmaz:  $A = \{\text{Párizs, London, Budapest, Bukarest, Helsinki, Moszkva, Berlin, Róma}\}$   
B halmaz:  $B = \{0,6 \text{ millió; } 1,7 \text{ millió; } 2,1 \text{ millió; } 2,7 \text{ millió; } 3,4 \text{ millió; } 10,5 \text{ millió; } 12 \text{ millió}\}$
- $A = \{\text{alma, szilva, ribizli, őszibarack, körte, szőlő, dió}\}$ ,  
 $B = \{\text{bogyós; alma; csonthéjas}\}$ .

# Megfeleltetés-szám párok-grafikus kép-Venn-diagram

Ebben a feladatban a hozzárendelést szám párokkal adtuk meg:

$$(-3; -1); (-2, 5; -0, 5); (-1; 1); (1; 3); (2; 4); (2, 5; 4, 5).$$

Minden szám párs első jelzőszámához a második jelzőszámát rendeljük hozzá.

- Add meg az  $A$  és  $B$  halmazt elemeik felsorolásával, és írd le, hogy milyen szabály szerint rendeltük az  $A$  halmaz elemeihez a  $B$  elemeit!
- Ábrázold ezt a kapcsolatot derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy az  $x$ -tengelyen az  $A$  halmaz, az  $y$ -tengelyen a  $B$  halmaz elemei legyenek!
- Rajzold meg halmazábrán is ezt az összefüggést!

# A függvény fogalmának bevezetése

## Összegzés

- függvény = egyértelmű megfeleltetés
- értelmezési tartomány
- értékkeszlet

# A függvény fogalmának bevezetése

## Összegzés

- függvény = egyértelmű megfeleltetés
- értelmezési tartomány
- értékkeszlet



# A függvény fogalmának bevezetése

## Összegzés

- függvény = egyértelmű megfeleltetés
- értelmezési tartomány
- értékkészlet

# A függvény fogalmának bevezetése

## Összegzés

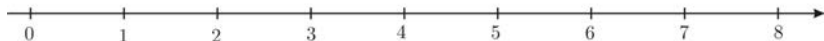
- függvény = egyértelmű megfeleltetés
- értelmezési tartomány
- értékkeszlet

# A függvény fogalmának bevezetése

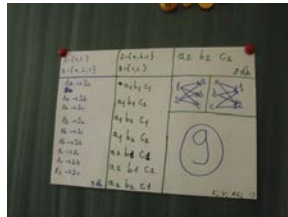
Az eddigi tapasztalataid alapján válaszolj a következő kérdésekre!

- Minek az alapján döntöd el, hogy melyek az összetartozó értékek?
- Hogyan tudnád 2 csoportba (halmazba) sorolni az értékeket?
- Hogyan jelenik meg a hozzárendelés egyértelműsége a különböző függvényábrázolási módokban?

# Függvények felismerése különböző reprezentációkban



# Függvény jelölése, összeszámlálása



## Tapasztalatok, következtetések

- előnyök
- hátrányok
- visszajelzések

## Tapasztalatok, következtetések

- előnyök
- hátrányok
- visszajelzések

## Tapasztalatok, következtetések

- előnyök
- hátrányok
- visszajelzések



## Tapasztalatok, következtetések

- előnyök
- hátrányok
- visszajelzések

## Mit tapasztaltál, tanultál ezeken a foglalkozásokon?

- Megértettem, hogy mik is azok a függvények, azt tapasztaltam, hogy csoportmunkakor a csoport legtöbb tagja aktívan részt vesz mindenben.
- Azt tapasztaltam, hogy az osztály tud csoportokban dolgozni, és megtanultuk játékosan a függvényeket.
- Azt tapasztaltam, hogy ilyen jellegű órákon sokkal jobban megértem a matematikát.
- Megtanultam csapatban dolgozni, vezetni, összhangot teremteni, és azt, hogy valójában a matektanulás izgalmas és szórakoztató legyen, játékosan fogjuk fel a dolgokat. Még azt tanultam, hogy mi a függvény, és még sok mindent.
- A függvényről tanultunk. Azt tapasztaltam, hogy jobban tudok figyelni és nem annyira unalmas, mint az átlagos órák.
- A függvényeket: a megfeleltetés alapjait, majd örömként lassan a függvényekig, mindent más-más csapatmunkával vagy más módon.

## Mit gondolsz, hasznosabb vagy nem egy hagyományos óra, mint egy ilyen jellegű óra?

- Az ilyen óra annyival lehet hasznosabb, hogy nem annyira unalmas és így jobban meg lehet jegyezni, viszont lehet, hogy a játékosság miatt, összevegyülnek a dolgok, vagy a játékosság mellett nem marad meg a lényeg, de az alapokat könnyebb így megtanulni.
- Szerintem egy ilyen jellegű óra hasznosabb, mert jobban odafigyelünk, könnyebb megtanulni, aktívabbak vagyunk.
- Jobb, mert érdekesebb és könnyebb megérteni. Nem jobb, mert lassúbb az oktatás.
- Hasznosabb, mert csoportmunkát végzünk; mindenki kiveheti a részét a tevékenységből; gyakorlatiasabb, mint egy hagyományos órai lecke.
- Szerintem mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai. De az ilyen jellegű foglalkozás sokkal jobban megmarad bennünk, jobb a hangulat és közben még tanulunk is. Az egyik legjobb dolog ebben, hogy még csoportban is dolgozhatunk, megvitathatjuk, hogy mi a helyes szerintünk.

## Aktívabban tudsz-e kapcsolódni egy ilyen tevékenységbe, mint egy hagyományos órába?

- Igen, mert jobban ki tudom fejezni, amit szeretnék.
- Igen, mert így a tanáron kívül az osztálytársak is segítenek.
- Igen, mert jobban megbeszéljük a témával kapcsolatos dolgokat, mint egy hagyományos órán.
- Igen, mert nagyobb odafigyelést igényel és érdekel is.
- Igen, mert csoportban dolgozunk és így mindenki kiveszi a részét a munkából, és ha valaki valamit nem ért, a többiek elmagyarázzák neki.
- Igen, mert így jobban tudok figyelni és jobban megértem.

## Aktívabban tudsz-e kapcsolódni egy ilyen tevékenységbe, mint egy hagyományos órába?

- Igen, mert jobban ki tudom fejezni, amit szeretnék.
- Igen, mert így a tanáron kívül az osztálytársak is segítenek.
- Igen, mert jobban megbeszéljük a témával kapcsolatos dolgokat, mint egy hagyományos órán.
- Igen, mert nagyobb odafigyelést igényel és érdekel is.
- Igen, mert csoportban dolgozunk és így mindenki kiveszi a részét a munkából, és ha valaki valamit nem ért, a többiek elmagyarázzák neki.
- Igen, mert így jobban tudok figyelni és jobban megértem.

## Ha néhány mondatban el kellene meséld egy hetedikesnek, hogy mi a függvény, mit mondanál?

- Van két halmazunk. Az első halmazból nyílak mennek ki a második halmazba. FONTOS! Az első halmaz elemeiből csak egy nyíl mehet ki.
- A függvény lényege, hogy számokat, tárgyakat vagy bármit megfeleltetünk másik tárgyakkal, számokkal vagy bármivel, de fontos, hogy minden számnak, tárgynak csak egy párja lehet, másképp a megfeleltetés nem függvény.
- A függvényt egyértelmű megfeleltetésnek is mondják. Van két halmaz, az egyik az értelmezési tartomány, a másik az értéktartomány. Az értelmezési tartományból csakis egy nyíl mehet ki, de a másikba több is érkezhethet.
- A függvény: amikor egy számpárban egy szám kétszer nem szerepel.
- Képzeld el egy derékszögű koordináta-rendszert pár ponttal. Az akkor lesz függvény, ha függőlegesen nem esnek a pontok egy szakaszra vagy a számpárokból az első szám nem szerepel kétszer.
- Van két csoport, amelyekben tagok vannak. Az első csoport MINDEN tagjának csatlakozni kell a második csoport tagjaihoz, de mindegyik csak egyhez. Tehát, ha az első csoport minden tagjának van egy és csakis egy párja a második