Kisebb kutatási feladatok a kíváncsiságvezérelt matematikatanítás tükrében

Nagy Örs, Marosvásárhely
Elektromaros Technológiai Líceum

A kutatás alapú tanulás

- a tanulók természetes kíváncsiságára épít
- a körülöttünk levő világ megértése
- kisebb matematikai és természettudományos megfigyelések, kérdések elemzése, modellezése
- kapcsolatok a körülöttünk levő világ és az iskolai tananyag között

$\longrightarrow$ tudományos gondolkodásmód használata a körülöttünk levő világ jobb megértése érdekében

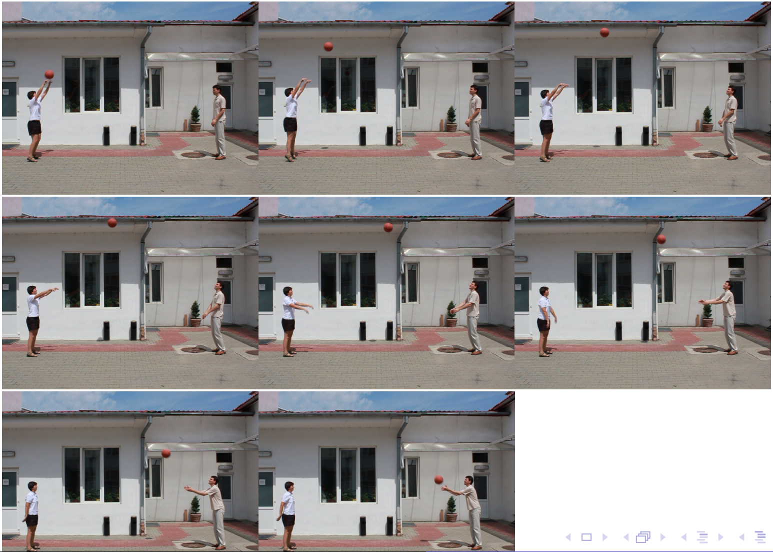
A kutatás alapú tanulás

- struktúrálatlan problémák
- megfelelő mértékű mankó, irányítás

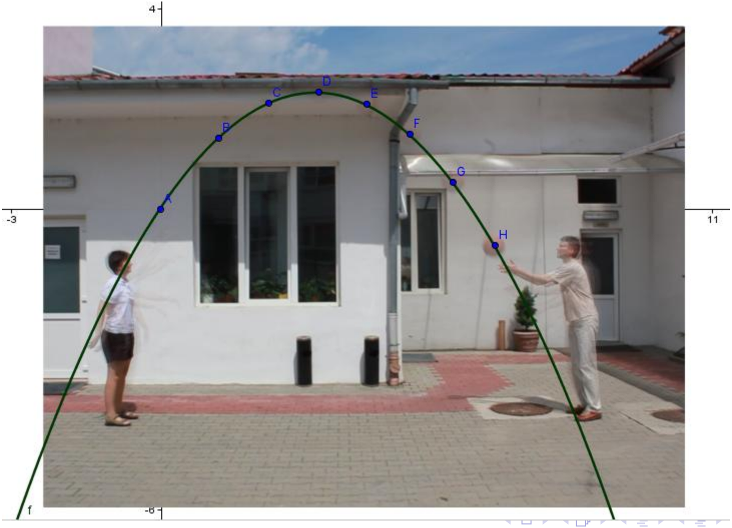
- Mi történne, ha ... ?
- Mit változtathatunk meg?
- Milyen hatása lesz a változásoknak?

Ágyúgolyó-ember

Kosárlabda



Parabola-e?

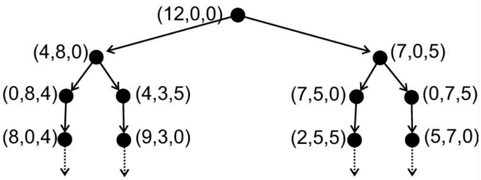


Esetleg ellipszis- vagy hiperboladarab?

Poisson feladata

Feladat

Egy embernek 12 pint bora van, amelynek felét a szomszédjának szeretné adni. Nem rendelkezik semmilyen más mérőeszközzel, csak egy 5 pint és egy 8 pint űrtartalmú edénnyel. Kimérhet-e 6 pint bort a 8 pintes edénybe?



- csúcsok: állapotok
- élek: egy-egy áttöltés
- első állapot: $(12, 0, 0)$
- második állapot: $(4, 8, 0)$ vagy $(7, 0, 5)$

Kérdések

- Melyek azok a mennyiségek, amelyeket ki lehet mérni?
- Hogyan függ a probléma megoldhatósága az edények méretétől és a kimérendő mennyiségektől?
- Rögzített edényméretekkel (és három edénnyel) milyen mennyiségeket lehet kimérni?
- Több edény esetén hogyan változnak az előbbi kérdések?

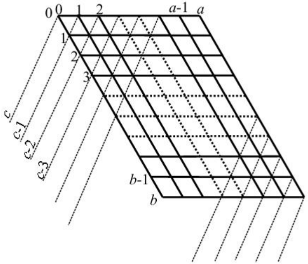
Általánosítás

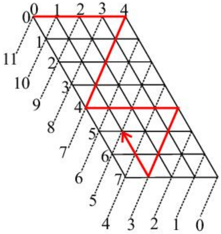
Feladat

Tekintsük az a, b és $c \geq \max\{a, b\}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ liter űrtartalmú, beosztás nélküli edényeket. Kezdetben legyen a harmadik edény tele vízzel, míg a másik kettő legyen üres. Vizsgáljuk a különböző edényekbe kimérhető vízmennyiségeket!

A probléma egy modellje

- $a \times b$ méretű $60°$-os paralelogrammarács (biliárdasztal)
- tanulmányozzuk az $O(0,0)$ pontból induló, OA, $A(a,0)$ él mentén haladó biliárdgolyó mozgását





(0,0,11)	(2,0,9)
(4,0,7)	(0,2,9)
(0,4,7)	(4,2,5)
(4,4,3)	(0,6,5)
(1,7,3)	(4,6,1)
(1,0,10)	(3,7,1)
(0,1,10)	(3,0,8)
(4,1,6)	(0,3,8)
(0,5,6)	(4,3,4)
(4,5,2)	(0,7,4)
(2,7,2)	(4,7,0)

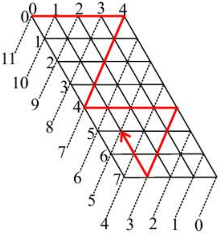
A biliárdgolyó mozgása ezen a speciális asztalon leírja az a, b és c edényekkel való töltögetési folyamatot.

Észrevételek

- Ha $c = a + b$ és $d := (a, b)$, akkor a biliárdgolyó pályája akkor és csak akkor halad át az (x, y) koordinátájú határ-rácsponton, ha $d \mid x$ és $d \mid y$.
- Ha $(a, b) = 1$, akkor a golyó pályája áthalad az összes határ-rácsponton.
- Minden kimérhető mennyiség osztható $d = (a, b)$-vel.

Algoritmus

- ha lehetséges, töltsél a-ból b-be
- ha b tele van, akkor töltsél b-ből c-be
- ha ez előző lépések közül egyik sem lehetséges, akkor töltsél c-ből a-ba



(0,0,11)	(2,0,9)
(4,0,7)	(0,2,9)
(0,4,7)	(4,2,5)
(4,4,3)	(0,6,5)
(1,7,3)	(4,6,1)
(1,0,10)	(3,7,1)
(0,1,10)	(3,0,8)
(4,1,6)	(0,3,8)
(0,5,6)	(4,3,4)
(4,5,2)	(0,7,4)
(2,7,2)	(4,7,0)

Feladatok

1. Adott három beosztás nélküli edény, amelyek űrtartalma rendre $7l, 17l, 24l$. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel.
   a) Mérj ki 1 liter vizet valmelyik edénybe!
   b) Mérj ki 1 liter vizet a legnagyobb edénybe!
   c) Mindhárom edény esetén add meg az összes, az illető edényben kimérhető mennyiséget!
2. Adott három beosztás nélküli edény, amelyek űrtartalma rendre $21l, 34l, 55l$. Kezdetben a legnagyobb edény tele van vízzel. Mérj ki 1 liter vizet a valamelyik edénybe!

Hipotézisek

A tanulók

- véletlenszerű lépések után rájönnek, hogy a korábbi állapotokat érdemes elkerülni
- sok lépést hajtanak végre, mielőtt feladnák
- a két korcsoport szignifikánsan különbözni fog a végrehajtott lépések szempontjából

Tapasztalatok

- Az első csoport 60%-a, a második 45%-a nem értette meg a feladatot (pl. beosztást rajzolt)
- Az első csoportnál az 1. feladat c) alpontjára és a 2. feladatra egyetlen helyes megoldás sem született
- A második csoportnál a 2. feladatra egyetlen helyes megoldás sem született
- A legtöbben 6-9 lépés után abbahagyták a töltögetést (még azok is, akiknek az 1. feladata jó)
- A munkamemória hamar megtelt
- Nem próbáltak több lehetőséget végigvinni

$\Longrightarrow$ Mivel a feladat véletlenszerűen is megoldható, nem a kombinatorikus készség, hanem a türelem és kitartás hiánya okozta a gyenge eredményeket.

Készítsünk négyzeteket

Hozzunk létre 12 darab gyufaszálból olyan alakzatot, amelyen 1,2,3... négyzet látható, és teljesülnek az alábbi szabályok:

- minden gyufaszálat fel kell használni
- az alakzatban mindenik gyufaszál fontos, tehát bármelyiket is elvéve megváltozik a látható négyzetek száma
- nem lehetnek szabad végek, vagyis mindegyik gyufaszál mindkét végéhez illeszkedik egy másik gyufaszál vége
- egymással párhuzamos gyufaszálaknak nem lehet egymást átfedő darabja
- nem párhuzamos gyufaszálak metszete megengedett